**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования**

**"Уфимский государственный авиационный технический университет"**

**Кафедра** Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

**Дисциплина:** Математическое моделирование

**Отчет по лабораторной работе № 1**

**Тема:** «Моделирование динамики популяций»

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Группа ПМ-453 | Фамилия И.О. | Подпись | Дата | Оценка |
| Студент | Шамаев И.Р. |  |  |  |
| Принял | Лукащук В.О. |  |  |  |

**Уфа 2023**

**Цель работы**: Получить навык численно-аналитического исследования математических моделей биологии, описывающих динамику популяций.

**Задание на лабораторную работу**

**Задача 1.** Рассматривается модель Ферхюльста

описывающая динамику численности одиночной популяции с учетом конкуренции за ресурсы в условиях их ограниченности.

1. Построить аналитическое решение уравнения.
2. Найти стационарные точки уравнения и выполнить анализ их устойчивости в зависимости от исходных данных задачи. Построить графики соответствующих решений.
3. Выполнить конечно-разностную дискретизацию уравнения по схеме Эйлера и показать, что она сводится к логистическому отображению
4. Определить аналитически первые четыре стационарные точки и выполнить анализ их устойчивости.
5. Построить бифуркационную диаграмму отображения и численно определить первые шесть точек бифуркации. По найденным значениям рассчитать приближения к числу Фейгенбаума
6. где – бифуркационные значения параметра для -го цикла удвоения.
7. Найти значения параметра при которых происходит расщепление решения на три ветви (трифуркация).

**Задача 2.** Рассмотреть обобщенную модель взаимодействия двух популяций типа хищник-жертва

где – размер популяции «жертв», – размер популяции «хищников». Вид функций определяется индивидуально в зависимости от номера варианта.

Для модели со значениями функций, соответствующих индивидуальному заданию, выполнить следующее:

1. дать биологическую интерпретацию модели;
2. выполнить обезразмеривание модели с целью уменьшения количества значимых коэффициентов;
3. численно-аналитически найти стационарные точки модели и определить их тип;
4. исследовать найденные стационарные точки на устойчивость;
5. построить в окрестности каждой стационарной точки фазовый портрет.

**Вариант 1:**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

# 

# Задача 1. Модель Ферхюльста

## Построение аналитического решения и определение стационарных точек уравнения Ферхюльста

Рассмотрим модель Ферхюльста динамики популяции

где

* предельное значение популяции;
* численность популяции;
* удельная скорость изменения численности особей;
* степень изменения скорости размножения особей в связи с ограниченностью ресурсов питания.

Определим стационарные точки уравнения :

Обозначим . Тогда:

В стационарных точках из предыдущего находим:

Таким образом, получаем, что при точка устойчива, точка неустойчива. При наоборот.

Рассмотрим следующую систему:

где начальное количество особей. Найдем решение системы:

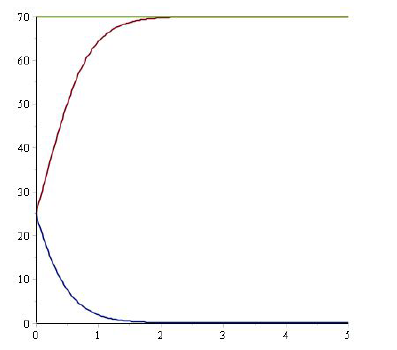
Далее, выражая из полученного уравнения количество особей в популяции в момент времени , получим:

## Анализ устойчивости стационарных точек уравнения Ферхюльста в зависимости от исходных данных

Положим предельное значение популяции и проведем исследование устойчивости стационарных точек уравнения в зависимости от исходных данных.

**Случай**

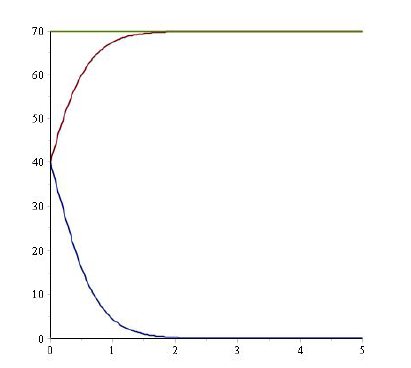
Рассмотрим . Если начальная численность популяции меньше величины экологической емкости популяции , то с течением времени ее размер будет расти, приближаясь к своему предельному значению . При этом, если начальная численность составляет менее половины емкости экологической ниши, на начальном этапе скорость роста популяции будет возрастать, пока численность не достигнет значения , а затем начнет снижаться, стремясь к нулю. Данный вид кривой обусловлен постепенным усилением действия неблагоприятных факторов по мере увеличения плотности популяции.



- начальный размер популяции , - предельное значение популяции (заленый график), (красный график), (синий график)

**Случай**

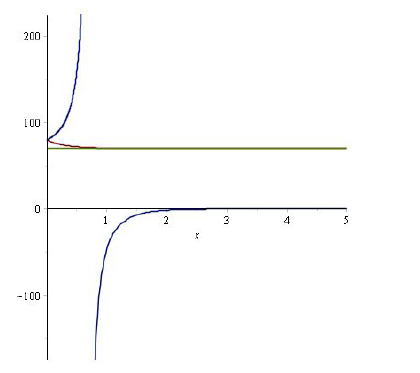
Рассмотрим . Если начальная численность популяции составляет более половины емкости экологической емкости популяции , то размер популяции будет увеличиваться, стремясь к значению , а скорость ее роста будет неуклонно снижаться. Данный вид кривой так же обусловлен постепенным усилением действия неблагоприятных факторов по мере увеличения плотности популяции.



- начальный размер популяции , - предельное значение популяции (заленый график), (красный график), (синий график)

**Случай**

Если размер популяции в начальный момент времени больше предельно возможного значения, то численность популяции будет снижаться. Случай при невозможен, так как в этом случае популяция уже истратила свои ресурсы.



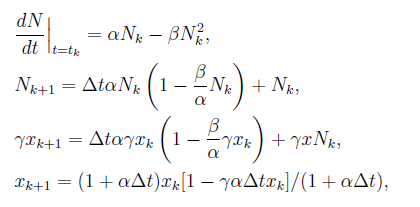
- начальный размер популяции , - предельное значение популяции (заленый график), (красный график), (синий график)

## Конечно-разностная дискретизация уравнения модели Ферхюльста по схеме Эйлера

Рассмотрим модель Ферхюльста динамики популяции :

Введем дискретные моменты времени и размеры популяции:

Далее, учитывая - , уравнение будет иметь вид:



Упрощая полученное выражение и обозначая , получим:

Таким образом, показали, что конечно-разностная дискретизация уравнения Ферхюльста сводит его к уравнению , которое назывется логистическим отображением.

## Определение стационарных точек логистического отображения и анализ их устойчивости

Рассмотрим уравнение Стационарной точкой данного уравнения будет являться решение системы .

Возьмем Тогда:

откуда получим

Рассмотрим последовательность Условие устойчивости стационарной точки имеет вид:

Таким образом, стационарными точками логистического отображения будут являться следующие точки:

Теперь проверим устойчивость полученных стационарных точек - :

Используя условие устойчивости получаем:

1. при устойчива;
2. при устойчива;
3. при устойчива;

## Бифуркационная диаграмма

Проведем для модели Ферхюльста аналитическое нахождение первой точки бифуркации.

Для точки бифуркации справедлива следующая система:

Произведем сложение обоих уравнений, затем вычтем из первого уравнения второе, и после некоторых преобразований получим систему:

Решая систему , получаем выражение для и :

Из найденной формулы делаем вывод, что точка бифуркации может существовать при значениях

Также легко убедиться, что при происходит раздвоение решения, так как

Найдем первую точку неустойчивости решения при . Для этого надо использовать правило дифференцирования сложной функции:

так как

Далее, чтобы найти значение , нужно решить следующее уравнение:

Следовательно, так же можно найти остальные точки бифуркации.

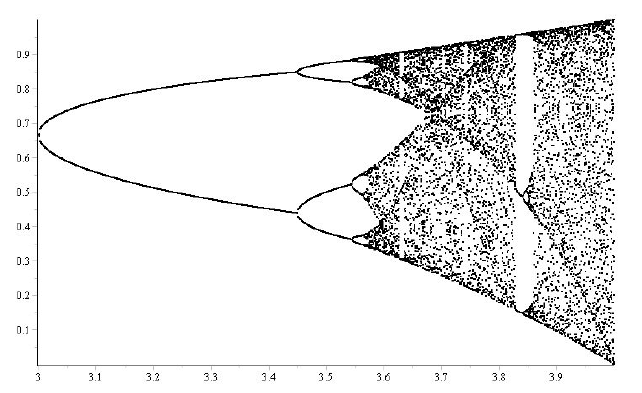
Приведем первые точки бифуркации:

и точку трифуркации:

На языке С++ была реализована программа, которая вычисляет:

* точки бифуркации, алгоритм нахождения которых следующий: при достаточно большом времени при варьировании параметра в полуинтервале с шагом запоминается точек, которые являются решением уравнения ;
* точку трифуркации;
* несколько первых приближений к числу Фейгенбаума, равное

C помощью математического пакета Maple было построено бифуркационное дерево

Бифуркационная диаграмма

# Задача 2. Модель Лотки-Вольтера

Пусть биологическая модель описывается системой двух автономных дифференциальных уравнений:

## Биологическая интерпретация модели

Согласно индивидуальному заданию система Лотки-Вольтера принимает вид:

Биологическая интерпретация модели следующая:

1. означает, что популяция жертв растет линейно;
2. показывает, что смертность жертв будет убывать с ростом популяции;
3. означает, что популяция хищников будет убывать квадратично со сдвигом на ;
4. показывает, что рождаемость хищников будет снижаться с ростом популяции жертв;

где произвольные положительные константы.

## Обезразмеривание модели

Индивидуальное задание:

где произвольные положительные константы.

Перейдем к обезразмериванию модели:

Таким образом, при учете индивидуального задания и введении переменных для обезразмеривания, биологическую модель можно представить следующей системой:

После проведения операции обезразмеривания, система принимает вид:

где

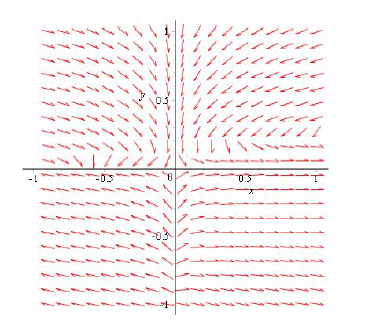
## Определение стационарных точек модели и анализ их устойчивости

Система имеет одну вещественную неотрицательную стационарную точку в начале координат:

А также вещественную неотрицательную точку

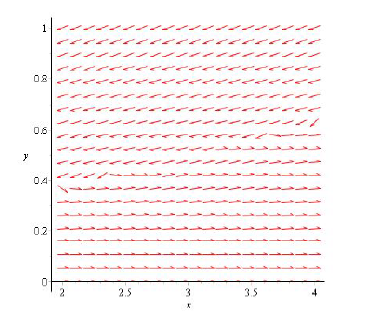
, получаемую при разрешении образуемого квадратного уравнения α=1, β=8, γ=2

Рассмотрим окрестность точки



Фазовый портрет точки (0; 0)

Данная вырожденная стационарная точка типа “седло” является неустойчивой. Рассмотрим теперь окрестность точки (3;1/2):



Фазовый портрет точки (1/2)

Данная точка так же является вырожденной. И на основе полученного фазового портрета позволяет сделать вывод, что каждая точка данной фазовой плоскости есть положение равновесия.

# Заключение

В ходе первой части проделанной лабораторной работы была реализована модель Ферхюльста, построено бифуркационное дерево и посчитаны приближенные значения числа Фейгенбаума. Второй частью лабораторной работы была исследована модель Лотки-Вольтера в рамках нахождения особых точек системы обыкновенных дифференциальных уравнений и определения их типов.

Проанализировав предоставленную модель, была получена одна особая точка. Из полученного результата делаем вывод, что поведение системы устроено одинаково и каждая её точка является положением равновесия.

#define \_USE\_MATH\_DEFINES

#include <iostream>

#include <conio.h>

#include <math.h>

#include <stdio.h>

#include <iomanip>

#include <stdlib.h>

#include <fstream>

using namespace std;

#define S 50

#define N 1000

struct double\_pair

{

double first;

double second;

};

struct double\_int

{

int value;

double key;

};

double\_int find(int num, double\_int\* mas, int max)

{

double\_int result;

for (int i = 0; i < max; i++)

{

if (mas[i].value == num)

{

if (num != 3)

{

result.key = mas[i].key;

result.value = num;

return result;

}

else

{

if (mas[i].key > double(3.55))

{

result.key = mas[i].key;

result.value = num;

return result;

}

}

}

}

}

int main()

{

int SpecialSolutionCount[] = { 2,4,8,16,3 };

double begin = 3, end = 4, x = double(2.0 / 3.0), eps = 0.0001, step = 0.000001;

double\_int\* solution\_num = new double\_int[1000000];

int solution\_count = 0;

int tmp = 0;

double func = x;

double i = begin;

while (i < end)

{

int unique\_count = 0;

double\_int\* unique\_solutions = new double\_int[100];

for (int j = N; j > 1; j--)

{

func = func \* i \* (1.0 - func);

if (j < S)

{

bool unique = true;

for (int k = 0; k < unique\_count; k++)

{

if (abs(unique\_solutions[k].key - func) < eps)

{

unique = false;

unique\_solutions[k].value++;

}

}

if (unique)

{

unique\_solutions[unique\_count].key = func;

unique\_solutions[unique\_count].value = 1;

unique\_count++;

}

}

}

solution\_num[tmp].key = i;

solution\_num[tmp].value = unique\_count;

tmp++;

delete[] unique\_solutions;

i += step;

}

ofstream out;

out.open("bif.csv");

for (int i = 0; i < tmp; i++)

{

out << solution\_num[i].key << ";" << solution\_num[i].value << endl;

}

out.close();

double\_int\* first\_result = new double\_int[5];

for (int i = 0; i < 5; i++)

{

first\_result[i] = find(SpecialSolutionCount[i], solution\_num, tmp);

}

for (int i = 0; i < 5; i++)

{

cout << first\_result[i].value << " " << first\_result[i].key << " ";

if (i > 1 && i <= 3)

{

double diff = (first\_result[i - 1].key - first\_result[i - 2].key) / (first\_result[i].key - first\_result[i - 1].key);

cout << diff;

}

cout << endl;

}

\_getch();

return 0;

}